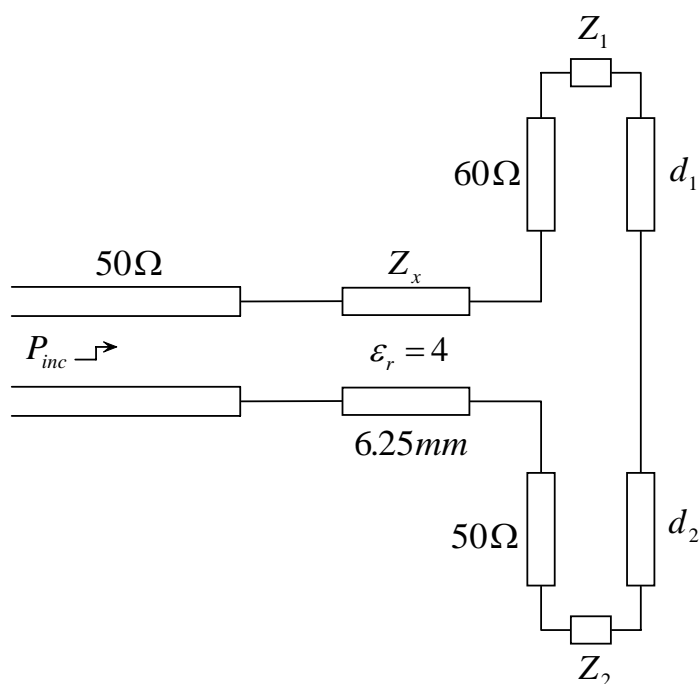


ESERCIZIO 5 - TUTORATO PROPAGAZIONE A.A. 06/07

03-04/04/2007

Esercizio 2 (9 punti /15)

Prova scritta di propagazione (1° parte) - 21 01 2003



$$f = 6 \text{ GHz}$$

$$Z_1 = 20 \cdot (1 - 2j) \Omega$$

$$Z_2 = 180 \cdot (1 + j) \Omega$$

$$d_1 = 20 \text{ mm}$$

$$P_{inc} = 30 \text{ W}$$

Linee in aria (se non diversamente indicato)

- Si Calcoli il minimo valore di d_2 tale che su Z_2 si dissipi metà della potenza dissipata su Z_1 .
- Per quel valore di d_2 si calcoli il valore di Z_x che massimizza la potenza totale assorbita, e la si calcoli.

SOLUZIONI

$$d_2 = 4,037 \text{ mm}$$

$$Z_x = 116,427 \Omega$$

$$P_d = 20,551 \text{ W}$$

a) Bilanciamento della Potenza sui due carichi serie.

L'esercizio proposto chiede di avere una dissipazione di potenza su Z_2 pari alla metà di quella dissipata su Z_1 . Siamo nel caso di carichi in serie, per cui occorre imporre la condizione:

$$\operatorname{Re}\{Z_{IN2}\} = \frac{\operatorname{Re}\{Z_{IN1}\}}{2}$$

Poiché della linea 1 sono noti tutti i dati (impedenza caratteristica, lunghezza e carico), è possibile determinare Z_{IN1} come

$$Z_{IN1} = Z_{L1} \cdot \frac{Z_1 + j \cdot Z_{L1} \tan(\beta \cdot d_1)}{Z_{L1} + j \cdot Z_1 \tan(\beta \cdot d_1)}$$

La linea 1 è in aria, quindi:

$$f = 6 \text{ GHz} \quad C_0 = 3 \cdot 10^8 \left[\frac{m}{s} \right] \quad \lambda_0 = \frac{C_0}{f} = 50 [\text{mm}] \quad \beta_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_0} = 125.664 [m^{-1}]$$

$$d_1 = 20 [mm] \quad \beta_0 \cdot d_1 = 2.513 [rad] \quad \tan(\beta_0 \cdot d_1) = -0.7265$$

La su impedenza di ingresso si calcola al solito come:

$$Z_{IN1} = Z_{L1} \cdot \frac{Z_1 + j \cdot Z_{L1} \cdot T_1}{Z_{L1} + j \cdot Z_1 \cdot T_1} = \quad \text{con } T_1 = \tan(\beta_0 \cdot d_1)$$

$$= Z_{L1} \cdot \frac{R_1 + j \cdot X_1 + j \cdot Z_{L1} \cdot T_1}{Z_{L1} + j \cdot (R_1 + j \cdot X_1) \cdot T_1} =$$

e razionalizzando

$$\begin{aligned}
&= Z_{L1} \cdot \frac{Z_{L1} \cdot R_1 \cdot (T_1^2 + 1) + j \cdot [Z_{L1} \cdot X_1 \cdot (1 - T_1^2) + (Z_{L1}^2 - |Z_1|^2) \cdot T_1]}{Z_{L1}^2 + |Z_1|^2 \cdot T_1^2 - 2 \cdot Z_{L1} \cdot X_1 \cdot T_1} \\
&= 60 \cdot \frac{60 \cdot 20 \cdot (0.7265^2 + 1) + j \cdot [60 \cdot (-40) \cdot (1 - 0.7265^2) + (60^2 - 20^2 - 40^2) \cdot (-0.7265)]}{60^2 + (20^2 + 40^2) \cdot 0.7265^2 - 2 \cdot 60 \cdot (-40) \cdot (-0.7265)} = \\
&= 94.157 - j117.892 \, \Omega
\end{aligned}$$

Lo stesso tipo di calcolo andrebbe applicato per ottenere Z_{IN2} , solamente che stavolta la lunghezza della linea 2 è incognita. Nell'espressione del trasporto di impedenza conviene considerare come incognita direttamente la $\tan(\beta_0 \cdot d_2)$ al posto della sola d_2 , perché questo porta semplificazioni sui calcoli.

$$\begin{aligned}
Z_{IN2} &= Z_{L2} \cdot \frac{Z_2 + j \cdot Z_{L2} \cdot T_2}{Z_{L2} + j \cdot Z_2 \cdot T_2} \quad \text{con } T_2 = \tan(\beta_0 \cdot d_2) \\
&= Z_{L2} \cdot \frac{R_2 + j \cdot X_2 + j \cdot Z_{L2} \cdot T_2}{Z_{L2} + j \cdot (R_2 + j \cdot X_2) \cdot T_2} =
\end{aligned}$$

e razionalizzando

$$= Z_{L2} \cdot \frac{Z_{L2} \cdot R_2 \cdot (T_2^2 + 1) + j \cdot [Z_{L2} \cdot X_2 \cdot (T_2^2 - 1) + (|Z_2|^2 - Z_{L2}^2) \cdot T_2]}{Z_{L2}^2 + |Z_2|^2 \cdot T_2^2 - 2 \cdot Z_{L2} \cdot X_2 \cdot T_2}$$

estrapolando la parte reale che ci serve:

$$\text{Re}(Z_{IN2}) = Z_{L2} \cdot \frac{Z_{L2} \cdot R_2 \cdot (T_2^2 + 1)}{Z_{L2}^2 + |Z_2|^2 \cdot T_2^2 - 2 \cdot Z_{L2} \cdot X_2 \cdot T_2}$$

Imponiamo ora la condizione sulle potenze:

$$\operatorname{Re}\{Z_{IN2}\} = \frac{\operatorname{Re}\{Z_{IN1}\}}{2} = 47.079 \Omega$$

$$Z_{L2} \cdot \frac{Z_{L2} \cdot R_2 \cdot (T_2^2 + 1)}{Z_{L2}^2 + |Z_2|^2 \cdot T_2^2 - 2 \cdot Z_{L2} \cdot X_2 \cdot T_2} = \frac{\operatorname{Re}\{Z_{IN1}\}}{2}$$

$$\frac{50 \cdot 180 \cdot (T_2^2 + 1)}{50^2 + (180^2 + 180^2) \cdot T_2^2 - 2 \cdot 50 \cdot 180 \cdot T_2} = \frac{47.079}{50}$$

$$\frac{5 \cdot 18 \cdot (T_2^2 + 1)}{5^2 + (18^2 + 18^2) \cdot T_2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 18 \cdot T_2} = \frac{47.079}{50}$$

$$\frac{90 + 90 \cdot T_2^2}{648 \cdot T_2^2 - 180 \cdot T_2 + 25} = \frac{47.079}{50}$$

$$(648 \cdot T_2^2 - 180 \cdot T_2 + 25) \frac{47.079}{50} = 90 + 90 \cdot T_2^2$$

$$520.157 \cdot T_2^2 - 169.488 \cdot T_2 - 66.46 = 0$$

equazione di secondo grado che risolta ci fornisce:

$$\tan(\beta_0 \cdot d_2) = T_2 = \frac{169.488 \pm \sqrt{169.488^2 + 4 \cdot 520.157 \cdot 66.46}}{2 \cdot 520.157} = \begin{cases} 0.55575 \\ -0.22991 \end{cases}$$

invertendo la tangente

$$\arctan(T_2) = \beta_0 \cdot d_2 \pm n \cdot \pi$$

$$d_2 = \frac{\arctan(T_2) \pm n \cdot \pi}{\beta_0} = \frac{\arctan(T_2) \pm n \cdot \pi}{2 \cdot \pi} \cdot \lambda_0$$

i due risultati portano a

$$d_{2a} = \frac{\arctan(T_2) \pm n \cdot \pi}{2 \cdot \pi} \cdot \lambda_0 = \frac{\arctan(0.55575)}{2 \cdot \pi} \cdot 50mm = \frac{0.50724}{2 \cdot \pi} \cdot 50mm = 4.037mm$$

$$d_{2b} = \frac{\arctan(T_2) \pm n \cdot \pi}{2 \cdot \pi} \cdot \lambda_0 = \frac{\arctan(-0.22991) + \pi}{2 \cdot \pi} \cdot 50mm = \frac{-0.22598 + \pi}{2 \cdot \pi} \cdot 50mm = 23.202mm$$

Premesso che entrambe le soluzioni sono corrette, si sceglie sempre, come soluzione, quella più corta perché avrà ovviamente una minore energia elettromagnetica immagazzinata.

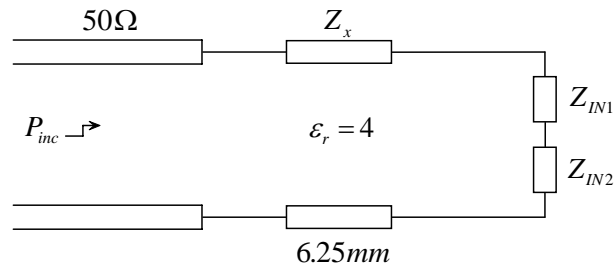
Per quella lunghezza l'impedenza Z_{IN2} vale:

$$\begin{aligned} Z_{IN2} &= Z_{L2} \cdot \frac{Z_{L2} \cdot R_2 \cdot (T_2^2 + 1) + j \cdot [Z_{L2} \cdot X_2 \cdot (T_2^2 - 1) + (|Z_2|^2 - Z_{L2}^2) \cdot T_2]}{Z_{L2}^2 + |Z_2|^2 \cdot T_2^2 - 2 \cdot Z_{L2} \cdot X_2 \cdot T_2} = \\ &= 50 \cdot \frac{5 \cdot 18 \cdot (0.5557^2 + 1) + j \cdot [5 \cdot 18 \cdot (0.5557^2 - 1) + (18^2 + 18^2 - 5^2) \cdot 0.5557]}{5^2 + (18^2 + 18^2) \cdot 0.5557^2 - 2 \cdot 5 \cdot 18 \cdot 0.5557} \\ &= 47.079 - j \cdot 113.516 \, \Omega \end{aligned}$$

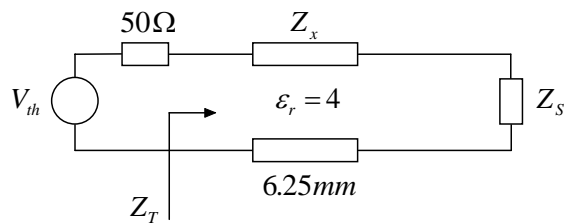
b) Massimizzazione della Potenza sui carichi.

La massimizzazione della potenza è del tutto indipendente dal bilanciamento della potenza sui due carichi.

Il bilanciamento ci ha condotti ad un circuito così semplificato:



Che può essere ulteriormente semplificato applicando il circuito equivalente di Thevenin alla linea semidefinita di sinistra e sommando le due impedenze di carico in serie.



Dove, sulla linea di alimentazione è presente un'onda incidente di ampiezza

$$V^+ = \sqrt{2 \cdot Z_0 \cdot P_{inc}} = 55,77V \quad \text{in quanto} \quad P_{inc} = \frac{|V^+|^2}{2 \cdot Z_0}$$

Il generatore equivalente di Thevenin avrà allora tensione $V_{th} = 2 \cdot V^+ = 109.54V$ e impedenza pari a quella caratteristica della linea $Z_{th} = Z_0 = 50 \Omega$.

Mentre il carico serie vale invece:

$$Z_S = Z_{IN1} + Z_{IN2} = 141,236 - j \cdot 231,407 \Omega$$

Conviene riportare tale carico oltre la linea Z_x in modo da ridurlo ad un'unica impedenza equivalente di valore Z_T .

La lunghezza d'onda e la costante di propagazione della linea x, essendo questa con dielettrico vale:

$$\lambda_x = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_x}} = 25 [\text{mm}] \quad \text{e} \quad \beta_x = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_x} = 251.327 [m^{-1}]$$

ovvero la linea è una linea $\lambda/4$; e facile rendersene conto calcolando la lunghezza elettrica:

$$d_x = 6.25 [mm] \quad \beta_x \cdot d_x = 1.57 [\text{rad}] \quad \beta_x \cdot d_x \cdot \frac{180}{\pi} = 90^\circ$$

L'impedenza Z_T vale dunque semplicemente $Z_T = \frac{Z_x^2}{Z_s}$, con Z_x incognito da determinare per massimizzare la potenza sui carichi.

Tale potenza vale:

$$P = \frac{1}{2} |I|^2 \text{Re}\{Z_T\} = \frac{1}{2} \frac{|V_{th}|^2}{|Z_T + Z_{th}|^2} \text{Re}\{Z_T\} = \frac{1}{2} |V_{th}|^2 \frac{\text{Re}\left\{\frac{Z_x^2}{R_s + jX_s}\right\}}{\left|\frac{Z_x^2}{R_s + jX_s} + Z_{th}\right|^2}$$

Questa espressione va massimizzata al variare di Z_x .

Quello che va massimizzato, tralasciando ciò che è costante è allora

$$\frac{\text{Re}\left\{\frac{Z_x^2}{R_s + jX_s}\right\}}{\left|\frac{Z_x^2}{R_s + jX_s} + Z_{th}\right|^2} = \frac{\text{Re}\left\{\frac{Z_x^2 \cdot (R_s - jX_s)}{|R_s + jX_s|^2}\right\}}{\left|\frac{Z_x^2 \cdot (R_s - jX_s) + Z_{th} \cdot |R_s + jX_s|^2}{|R_s + jX_s|^2}\right|^2} = \frac{Z_x^2 \cdot R_s \cdot (R_s^2 + X_s^2)}{\left|Z_x^2 \cdot R_s + Z_{th} \cdot |Z_s|^2 - j \cdot Z_x^2 \cdot X_s\right|^2} \quad \text{max!}$$

Conviene minimizzare l'inverso (eliminando anche il fattore $R_s \cdot (R_s^2 + X_s^2)$ costante che non influisce sulla derivata e quindi sulla massimizzazione) e usare come variabile incognita $Z = Z_x^2$:

$$\frac{\left| (ZR_s + Z_{th}|Z_s|^2) - jZX_s \right|^2}{Z} = \frac{(ZR_s + Z_{th}|Z_s|^2)^2 + (ZX_s)^2}{Z} = \frac{Z^2 R_s^2 + 2ZZ_{th}R_s|Z_s|^2 + Z_{th}^2|Z_s|^4 + Z^2 X_s^2}{Z} =$$

$$= \frac{Z^2|Z_s|^2 + 2ZZ_{th}R_s|Z_s|^2 + Z_{th}^2|Z_s|^4}{Z} \quad \text{min!}$$

Derivando rispetto a Z:

$$\frac{Z \cdot (2Z|Z_s|^2 + 2Z_{th}R_s|Z_s|^2) - (Z^2|Z_s|^2 + 2ZZ_{th}R_s|Z_s|^2 + Z_{th}^2|Z_s|^4)}{Z^2} = 0$$

$$\frac{2Z^2|Z_s|^2 - Z^2|Z_s|^2 - Z_{th}^2|Z_s|^4}{Z^2} = 0$$

$$\frac{Z^2|Z_s|^2 - Z_{th}^2|Z_s|^4}{Z^2} = 0$$

$$Z^2|Z_s|^2 - Z_{th}^2|Z_s|^4 = 0 \quad Z^2 = Z_{th}^2|Z_s|^2 \quad Z = Z_{th}|Z_s|$$

e infine

$$Z_x = \sqrt{Z_{th}|Z_s|} = \sqrt{50 \cdot |141,236 - j231,407|} = 116.427 \Omega$$

L'impedenza Z_T vale dunque

$$Z_T = \frac{Z_x^2}{Z_s} = \frac{116.427^2}{141,236 - j231,407} = \frac{116.427^2}{141,236 - j231,407} \cdot \frac{141,236 + j231,407}{141,236 + j231,407} = 26,048 + j42,68 \Omega$$

e infine la potenza vale

$$P = \frac{1}{2} \frac{|V_{th}|^2}{|Z_T + Z_{th}|^2} \operatorname{Re}\{Z_T\} = \frac{1}{2} \frac{|109.54|^2}{|26,048 + j42,68 + 50|^2} 26,048 = 20.551[W]$$